Exercice 1

*/ $\int_2^1 (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_2^1$

$= (1+1)-(4+2) = 2-6 = -4$

*/ $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_1^2$

$= \left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(\frac{1}{3}-1+3\right) = \frac{14}{3}-\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

*/ $\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}dx$

$= \left[\frac{-1}{x^2+x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}$

*/ $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx$

$= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{3}-1$

*/ $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}dx = \int_1^2 \left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln x\right]_1^2 = \left(\frac{4}{2}+2+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}+1+\ln 1\right)$

$= 4+\ln 2-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}+\ln 2$

*/ $\int_0^2 \left(1-|x-1|\right)dx = I$

On a:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$		$x-1$
$1-\lvert x-1\rvert$	x	0	$2-x$

D'où :

$I = \int_0^1 \left(1-|x-1|\right)dx + \int_1^2 \left(1-|x-1|\right)dx$

$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}+\left[\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}+2-2+\frac{1}{2} = 1$

*/ $\int_2^3 \frac{1}{3x+2}\,dx = \int_2^3 \frac{3}{3(3x+2)}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{(3x+2)'}{(3x+2)}\,dx$

$= \frac{1}{3}\left[\ln(3x+2)\right]_2^3 = \frac{1}{3}\left[\ln 11-\ln 8\right]$

$= \frac{1}{3}\ln\frac{11}{8}$

*/ $\int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$

*/ $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \left[x-\ln(x+1)\right]_1^2 = \left[(2-\ln 3)-(1-\ln 2)\right]$

$= 2-\ln 3-1+\ln 2 = 1+\ln\frac{2}{3}$

*/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}.\ln x\,dx$

$= \int_1^e (\ln x)'.\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln x^2\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}\ln^2 e-0 = \frac{1}{2}$

$$*/\ \int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_2^e \frac{1}{x}.(\ln x)^2 dx$$

$$= \int_2^e (\ln x)'.\ln^2 x dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_2^e$$

$$= \frac{1}{3}\ln^3 e - \frac{1}{3}\ln^3 2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln^3 2$$

$$*/\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Exercice 2

$$f(x) = \frac{3x-5}{2x-1}$$

$$g(x) = \frac{x^2+2x-5}{x+4}$$

$$h(x) = \frac{e^x-2}{e^x+1}$$

1) $a + \frac{b}{2x-1} = \frac{a(2x-1)+b}{2x-1}$

$$= \frac{2ax+b-a}{2x-1} = \frac{3x-5}{2x-1}$$

D'où : $\begin{cases} 2a=3 \\ b-a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=a-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{7}{2} \end{cases}$

ET par suite:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{-\frac{7}{2}}{2x-1}$$

D'où:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}.\frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{2}dx - \frac{7}{4}\int_1^2 \frac{2}{2x-1}dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x\right]_1^2 - \frac{7}{4}\left[\ln(2x-1)\right]_1^2$$

$$= \left(3-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{4}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{3}{2} - \frac{7}{4}\ln 3$$

2) $g(x) = ax+b+\frac{c}{x+4}$

$$= \frac{ax(x+4)+b(x+4)+c}{x+4}$$

$$= \frac{ax^2+4ax+bx+4b+c}{x+4}$$

$$= \frac{ax^2+(4a+b)x+4b+c}{x+4}$$

D'où : $\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=2 \\ 4b+c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2-4a \\ c=5-4b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2-4=-2 \Rightarrow b=-2 \\ c=-5-4(-2)=-5+8=3 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{a=1, b=-2, c=3}$

donc :

$$\int_{-3}^0 g(x)dx = \int_{-3}^0 \left(x-2+\frac{3}{x+4}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln(x+4)\right]_{-3}^0$$

$$= (3\ln 4) - \left(\frac{9}{2} + 6 + 3\ln 1\right)$$

$$= 3\ln 4 - \frac{21}{2}$$

3) $h(x) = a + \frac{be^x}{e^x+1} = \frac{a(e^x+1)+be^x}{e^x+1}$

$$= \frac{ae^x+a+be^x}{e^x+1} = \frac{(a+b)e^x+a}{e^x+1}$$

D'où : $\begin{cases} a+b=1 \\ a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a=-2 \end{cases}$

Donc : $\boxed{a=-2, b=3}$

Par la suite :

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(-2+\frac{3e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= \left[-2x+3\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$$

$$= \left[-2+3\ln(e+1)\right]-\left[0+3\ln 2\right]$$

$$= -2+3\ln(e+1)-3\ln 2$$

Donc : $\boxed{\int_0^1 h(x) = -2+3\ln\frac{e+1}{2}}$

Exercice 3

1) Pour $x \neq 1$ on a:

$$x+1-\frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2-1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2+2x+1-1}{x+1} = \frac{x^2+2x}{x+1}$$

ET par suite:

$$\int_0^1 \frac{x^2+2x}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^2}{2} - \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{2}-\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$= 2-\ln 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\ln 2.$$

2) $I = \int_0^1 (t+1).\ln(t+1)\,dt$

Integrant par parties:
On pose

$$U(t) = \ln(1+t) \rightarrow U'(t) = \frac{1}{1+t}$$

$$V'(t) = 1+t \rightarrow V(t) = \frac{(1+t)^2}{2}$$

Donc :

$$I = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\ln(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+t)^2}{2}.\frac{1}{1+t}dt$$

$$= \frac{4}{2}\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+t)dt$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Exercice 4

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}.$$

1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}; x \neq 0, x \neq -1$

$$= \frac{a(1+x)^2+b(1+x)x+cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{a(1+2x+x^2)+b(x+x^2)+cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{a+2ax+ax^2+bx+bx^2+cx}{x(1+x)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

Donc on a:

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases}a+b=0\\2a+b+c=0\\a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\c=-2a-b\\a=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\c=-2+1=-1\\a=1\end{cases}\text{ et par suite:}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{-1}{1+x}+\frac{-1}{(1+x)^2}$$

2) $\alpha\in]1,+\infty[$

a) $\int_1^\alpha f(t)dt=\int_1^\alpha\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$

$$=\left[\ln t-\ln(1+t)+\frac{1}{1+t}\right]_1^\alpha$$

$$=\left(\ln\alpha-\ln(1+\alpha)+\frac{1}{1+\alpha}\right)-\left(\ln 1-\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\ln 2-\frac{1}{2}$$

Donc:

$$\boxed{\int_1^\alpha f(t)\,dt=\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}+\ln-\frac{1}{2}}$$

b) $A(\alpha)=\int_1^\alpha\frac{\ln t}{(1+t)^3}dt$

Integrant par parties:

$$U(t)=\ln t\to U'(t)=\frac{1}{t}$$

$$V'(t)=\frac{1}{(1+t)^3}\to V(t)=-\frac{1}{2(1+t)^2}$$

Donc:

$$A(\alpha)=\left[-\frac{1}{2(1+t)}\ln t\right]_1^\alpha+\frac{1}{2}\int_1^\alpha\frac{1}{t(1+t)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+\alpha)}\ln\alpha+\frac{1}{2}\int_1^\alpha f(t)dt$$

Par suite d'après 2) a)

$$A(\alpha)=-\frac{1}{2(1+\alpha)}\ln\alpha+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}+\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{\ln\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2(1+\alpha)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$$

Donc :

$$\boxed{A(\alpha)=\frac{1}{2(1+\alpha)}[-\ln\alpha+1]+\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}+\ln 2\right]-\frac{1}{4}}$$

c) $\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

$$=\lim_{\alpha\to+\infty}-\frac{\ln\alpha}{2(1+\alpha)}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+\frac{1}{2(1+\alpha)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$$

Avec

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{1+\alpha}=1\Rightarrow\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}=\ln 1=0$

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{1+\alpha}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}\times\frac{\alpha}{1+\alpha}=0$

*/ $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{1+\alpha}=0$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}}$$

Exercice 5

*/ $\int_0^1 xe^x dx$

$U(x)=x\to U'(x)=1$

$V'(x)=e^x\to V(x)=e^x$

Donc

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$$

D'où $\boxed{\int_0^1 xe^x dx = 1}$

*/ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$U(x) = \ln x \to U'(x) = \frac{1}{x}$$
$$V'(x) = \frac{1}{x^2} \to V(x) = -\frac{1}{x}$$

Donc :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{e} - 1\right]$$
$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

D'où $\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}}$

*/ $\int_1^x \ln t dt = \left[t \ln t - t\right]_1^x$
$$= (x \ln x - x) - (0 - 1)$$
$$= x \ln x - x + 1$$
$$\boxed{\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1}$$

*/ $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$
$$U(x) = \cos x \to U'(x) = -\sin x$$
$$V'(x) = e^x \to V(x) = e^x$$
$$I = \left[e^x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx$$
$$= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

Posons : $J = \int_0^\pi e^x \sin x dx$

Intégrant par parties J :

$$U(x) = \sin x \to U'(x) = \cos x$$
$$V'(x) = e^x \to V(x) = e^x$$

D'où on a :

$$J = \left[\sin x e^x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = 0 - I \Rightarrow J = -I$$

On trouve :

$$I = -e^\pi - 1 - I \Rightarrow 2I = -e^\pi - 1$$
$$\Rightarrow I = -\frac{(e^\pi + 1)}{2}$$

Conclusion :

$$\boxed{I = -\left(\frac{1 + e^\pi}{2}\right)}$$

*/ $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$

$$U(x) = (\ln x)^2 \to U'(x) = 2.\frac{1}{x}.\ln x$$
$$V'(x) = x \to V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e (x \ln x) dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e (x \ln x) dx$$

Intégrant par parties $\int_1^e (x \ln x) dx$:

$$U(x) = \ln x \to U'(x) = \frac{1}{x}$$
$$V'(x) = x \to V(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_1^e (x\ln x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

D'où :

$$\int_1^e x(\ln x)^2 dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2-1}{4}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_1^e x(\ln x)^2 dx = = \frac{e^2-1}{4}}$$

Exercice 6

1) $$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cos x)^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(e^x \cos x)^2 + (e^x \sin x)^2\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x}\cos^2 x + e^{2x}\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^\pi - 1}{2}$$

2) $$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cos x)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x \sin x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

On sait que: $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

D'où : $I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx$

Intégrant par parties:

$$U(x) = \cos 2x \to U'(x) = -2\sin 2x$$

$$V'(x) = e^{2x} \to V(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^\pi - \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx$$

Integrant par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 2x dx = K$

On pose:

$$U(x) = \sin 2x \to U'(x) = 2\cos 2x$$

$$V'(x) = e^{2x} \to V(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

Donc:

$$K = \left[\frac{e^{2x}}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x.e^{2x}dx$$

Par la suite $K = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx$

Il en résulte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx = -\frac{1}{2}(1+e^\pi)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}.\cos 2x dx = -\frac{1}{4}(1+e^\pi)$$

Ce qui donne : $\boxed{I-J = -\frac{1}{4}(1+e^\pi)}$

3)

$$\begin{cases} I + J = \dfrac{e^{\pi} - 1}{2} (1) \\ I - J = -\dfrac{1}{4}\left(1 + e^{\pi}\right) (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 2I = \frac{e^{\pi}-1}{2} - \frac{1+e^{\pi}}{4}$$

$$= \frac{2e^{\pi} - 2 - 1 - e^{\pi}}{4} = \frac{e^{\pi}-3}{4}$$

D'où $\boxed{I = \dfrac{e^{\pi}-3}{8}}$

$$(1) \Rightarrow J = \frac{e^{\pi}-1}{2} - I = \frac{e^{\pi}-1}{2} - \left(\frac{e^{\pi}-3}{8}\right)$$

$$= \frac{4e^{\pi} - 4 - e^{\pi} + 3}{8} = \frac{3e^{\pi}-1}{8} \quad \boxed{J = \frac{3e^{\pi}-1}{8}}$$

Conclusion :

$$I = \frac{e^{\pi}-3}{8} \quad \text{et} \quad J = \frac{3e^{\pi}-1}{8}.$$

Exercice 7

1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$1 + \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^x - 1 + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\boxed{\dfrac{e^x}{e^x - 1} = 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}}$

2) a) $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\left(e^t - 1\right)'}{e^t - 1} dt$

$$= \left[\ln\left(e^t - 1\right)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$= \ln\left(e^{\ln 3} - 1\right) - \ln\left(e^{\ln 2} - 1\right)$$

$$= \ln(3-1) - \ln(2-1)$$

$$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Donc: $\boxed{I = \ln 2}$

b) $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^t - 1} dt$

On sait que: $\forall t \in \mathbb{R}^* \ \dfrac{e^t}{e^t - 1} = 1 + \dfrac{1}{e^t - 1}$

D'où $\dfrac{1}{e^t - 1} = \dfrac{e^t}{e^t - 1} - 1$

Par suite:

$$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\frac{e^t}{e^t - 1} - 1\right) dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t - 1} dt - \int_{\ln 2}^{\ln 3} dt$$

$$= I - \left[t\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln 2 - [\ln 3 - \ln 2]$$

$$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3$$

Donc : $\boxed{J = 2\ln 2 - \ln 3}$

3) $K = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^t - 1} dt$

$$K - I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t}}{e^t - 1} dt - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\frac{e^{2t}}{e^t - 1} - \frac{e^t}{e^t - 1}\right) dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2t} - e^t}{e^t - 1} dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t\left(e^t - 1\right)}{e^t - 1} dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^t dt = \left[e^t\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = e^{\ln 3} - e^{\ln 2} = 3 - 2 = 1$$

Par suite: $K - I = 1$, il en résulte: $K = I + 1$

D'où : $\boxed{K = \ln 2 + 1}$

Exercice 8

I/ 1) $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (1-x)'e^{-x} + \left(e^{-x}\right)'(1-x) + 0$$

$$= -e^{-x}(1 + 1 - x) = -e^{-x}(2 - x)$$

$$= (x-2)e^{-x}, e^{-x} > 0$$

X	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$1-e^{-2}$	↗	

2) $g(2)=(1-2)e^{-2}+1=1-e^{-2}>0$

$1-e^{-2}$ est un minimum absolue pour g

Donc: $\forall x\in\square : g(x)\geq 1-e^{-2}>0$

Par suite $\boxed{g(x)>0,\ x\in\square}$

II/ $f(x)=xe^{-x}+x$

1) a) $x\mapsto x$: est une fonction polynôme donc dérivable sur $\square$.

$x\mapsto e^{-x}$: Dérivable sur$\square$.

$(e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}};e^{x}\neq 0\forall x\in\square)$

Donc f est dérivable sur$\square$.
(produit et somme de 2 fonctions dérivables).

On a :
$f'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})+1 \quad =e^{-x}(1-x)+1=g(x)$

b) $f'(x)=g(x)>0,\forall x\in\square$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}+x$

$=\lim\limits_{t\to+\infty} -te^{t}-t=-\infty,(t=-x)$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}}+x=+\infty$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}+x-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}}=0$

Donc $y=x$ est une asymptote oblique

au voisinage de $+\infty$.

b) $f(x)-x=xe^{-x}$ et $e^{-x}>0$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$-\ 0$	$+$
Position relative	D/C		C/D

$(0,0)$

c) $T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$=g(1)(x-1)+f(1)$

$=x-1+e^{-1}+1$

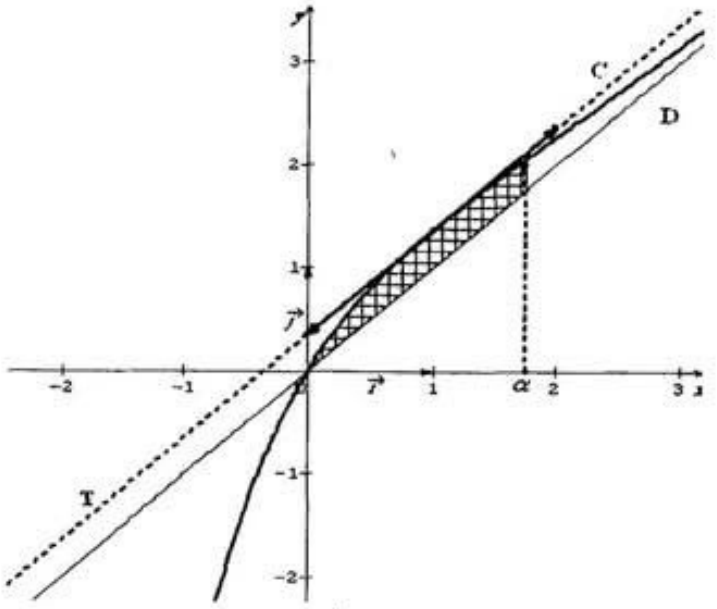
$\boxed{T: y=x+\dfrac{1}{e}}$

d) Branche infinie au $V_{-\infty}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^{-x}+x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+1=+\infty$

(C) Admet une B.I.P de direction $(o,\vec{j})$.



3) $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

*/ $A(\alpha) = \int_0^\alpha |f(x) - x| dx = \left(\int_0^\alpha xe^{-x} dx \right)$

Calculons $A(\alpha)$ par parties :

$U(x) = x \rightarrow U'(x) = 1$

$V'(x) = e^{-x} \rightarrow V(x) = -e^{-x}$

D'où :

$$A(\alpha) = \left[-xe^{-x} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha -e^{-x} dx$$

$$A(\alpha) = \left(\left(-\alpha e^{-\alpha} \right) - \left[e^{-x} \right]_0^\alpha \right) \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|$$

$$\boxed{A(\alpha) = \left(-\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 \right) \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\|}$$

*/

$$\lim_{\alpha \to +\infty} -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 ; \text{ on pose } t = -\alpha$$

$$= \lim_{t \to -\infty} te^t - e^t + 1$$

$$= 1$$

Donc $\boxed{\lim_{\alpha \to +\infty} -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 = 1}$

4) Pour $x < 1$ on a :

$$h(x) = \ln\left(g(x) - 1 \right)$$

a) pour $x < 1$:

*/ $h(x) = \ln\left[(1-x)e^{-x} + 1 - 1 \right]$

$= \ln\left[(1-x)e^{-x} \right]$; $e^{-x} > 0, 1 - x > 0$

$= \ln(1-x) + \ln e^{-x}$

$= \ln(1-x) - x$

Donc $\forall x < 1$ $\boxed{h(x) = \ln(1-x) - x}$

*/ $1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}$

$= \dfrac{1-x-1}{1-x} = \dfrac{-x}{1-x}$

D'où $\boxed{1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x}{1-x}}$

b) $I = \int_{-1}^0 \ln(1-t)\, dt$

Intégrant par parties :

$U(t) = \ln(1-t) \rightarrow U'(t) = \dfrac{-1}{1-t}$

$V'(t) = 1 \rightarrow V(t) = t$

D'où :

$$I = \left[t \ln(1-t) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-t}{1-t} dt$$

$$I = 0 - (-1)\ln 2 - \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{-1}{1-t} \right) dt$$

$$I = \ln 2 - \left[t + \ln(1-t) \right]_{-1}^0$$

$$I = \ln 2 - \left[0 - (-1 + \ln 2) \right]$$

$$I = \ln 2 - 1 + \ln 2$$

$$I = 2\ln 2 - 1$$

Donc : $\boxed{I = 2\ln 2 - 1}$

c)

$$J = \int_{-1}^0 h(t)\, dt = \int_{-1}^0 \left[-t + \ln(1-t) \right] dt$$

$$= \int_{-1}^0 -t\, dt + \int_{-1}^0 \ln(1-t)\, dt = \left[-\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 + I$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{(-1)^2}{2} \right) \right] + I = \frac{1}{2} + 2\ln 2 - 1$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} = J$$

Donc $\boxed{J = 2\ln 2 - \frac{1}{2}}$

Exercice 9

$f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$; $x > 0$

1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x - (x)'(1+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

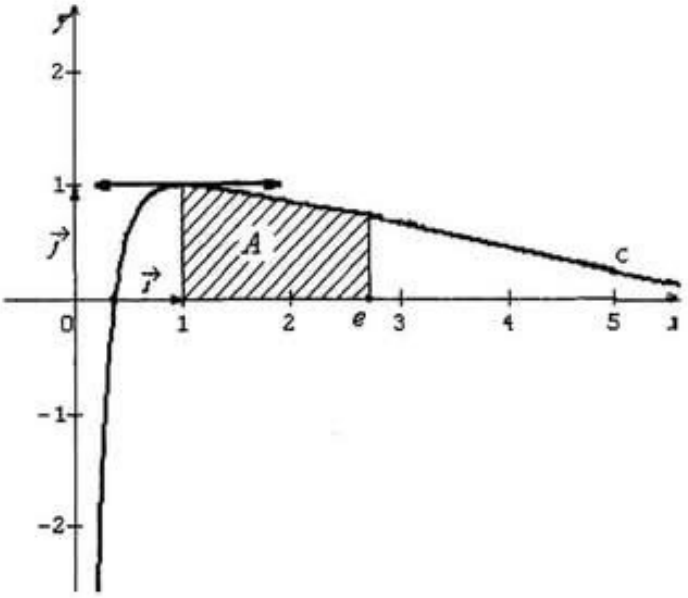
Le signe de $f'(x)$ est celui de $(-\ln x)$ car $x^2 > 0$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$+\infty$ 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$f(1) = \frac{1+0}{1} = 1$$



2)

$$A = \int_1^e |f(x)|dx = \left(\int_1^e f(x)\,dx\right)\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

$$= \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x\right)dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e (\ln x)'.\ln x\,dx$$

$$= [\ln x]_1^e + \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$$

$$= \ln e - \ln 1 + \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

Exercice 10

$f(x) = x\ln(x+2)$, $x \in [0,+\infty[$

1) $f'(x) = \ln(x+2) + x\times\dfrac{1}{x+2}$

Comme $x \geq 0$ donc $f'(x) > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+2) = +\infty$; $f(0) = 0$

x	0		$+\infty$
$f(x)$	+		
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

2) $f(x)-x = x\ln(x+2)-x$

$= x\left[\ln(x+2)-1\right]$

$x \geq 0$ Donc le signe de $f(x)-x$ est celui de $\ln(x+2)-1$.

Or: $\ln(x+2)-1=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=1$

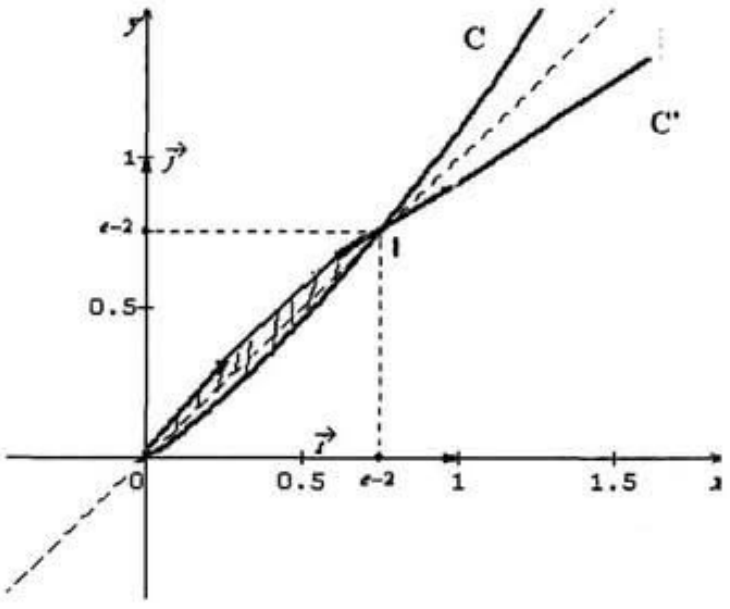
$\Leftrightarrow x+2=e \Leftrightarrow x=e-2$

X	$-\infty$ $e-2$ $+\infty$
$g(x)-f(x)$	$-$ 0 $+$
Position relative	Δ/C C/Δ

$I(e-2,e-2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2) = +\infty$

(C) Admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{j})$



3)a) */ f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc f réalise une bijection réciproque de $[0,+\infty[$ sur :

$f([0,+\infty[) = \left[f(0), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [0,+\infty[$

*/ $(C') = S_{\Delta}(C)$

b) $x \neq -2$ on a :

$$x-2+\frac{4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+4}{x+2}$$

$$= \frac{x^2-4+4}{x+2} = \frac{x^2}{x+2}$$

Donc $\forall x \neq -2$ on a : $\dfrac{x^2}{x+2} = x-2+\dfrac{4}{x+2}$

c) $I = \int_0^{e-2} f(t)\,dt = \int_0^{e-2} t\ln(t+2)\,dt$

Calculons I en utilisant une intégration par parties : pour cela posons :

$$U(t) = \ln(2+t) \to U'(t) = \frac{1}{2+t}$$

$$V'(t) = t \to V(t) = \frac{t^2}{2}$$

D'où on aura :

$$I = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t+2)\right]_0^{e-2} - \int_0^{e-2}\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{2+t}dt$$

$$= \frac{(e-2)^2}{2}\ln(e-2+2) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^{e-2}\frac{t^2}{2+t}dt$$

$$= \frac{(e-2)^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\int_0^{e-2}\frac{t^2}{2+t}dt$$

$$= \frac{(e-2)^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{e-2}\frac{t^2}{2+t}dt$$

Or $\dfrac{t^2}{t+2} = t-2+\dfrac{4}{t+2}$ (d'après 3) b)

Donc : $\int_0^{e-2}\frac{t^2}{t+2}dt=\int_0^{e-2}\left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt$

$$=\left[\frac{t^2}{2}-2t+4\ln(t+2)\right]_0^{e-2}$$

$$=\left[\frac{(e-2)^2}{2}-2(e-2)+4\ln(e-2+2)\right]-\left[0+4\ln(2)\right]$$

$$=\frac{(e-2)^2}{2}-2e+4+4-4\ln 2$$

$$=\frac{(e-2)^2}{2}+8-2e-4\ln 2$$

Par suite :

$$I=\frac{(e-2)^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{(e-2)^2}{2}+8-2e-4\ln 2\right]$$

$$I=\frac{(e-2)^2}{2}-\frac{(e-2)^2}{4}-4+e+2\ln 2$$

$$I=\frac{(e-2)^2}{4}-4+e+2\ln 2$$

$$I=\frac{e^2-4e+4}{4}-4+e+2\ln 2$$

$$I=\frac{e^2}{4}-e+1-4+e+2\ln 2$$

$$\boxed{I=\frac{e^2}{4}+2\ln 2-3}$$

d) $A=\left(\int_0^{e-2}\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx\right)9cm^2.$

Comme (C) et (C') sont symétriques

par rapport a $\Delta: y=x$ alors :

$$A=\left(2\int_0^{e-2}\left|f(x)-x\right|dx\right)9cm^2$$

$$A=2\int_0^{e-2}\left(x-f(x)\right)dx$$

Car (C) est au dessous de Δ.donc :

$$A=2\left[\int_0^{e-2}xdx-\int_0^{e-2}f(x)\,dx\right].9cm^2$$

$$A=2\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e-2}-I\right].9cm^2$$

$$A=2\left[\frac{(e-2)^2}{2}-I\right].9cm^2$$

$$A=\left((e-2)^2-2I\right).9cm^2$$

$$A=\left[(e-2)^2-2\left(\frac{e^2}{4}+2\ln 2-3\right)\right].9cm^2$$

$$A=\left(e^2-4e+4-\frac{e^2}{2}-\ln 2+6\right).9cm^2$$

$$A=\left(\frac{e^2}{2}+10-4e-\ln 2\right).9cm^2$$

D'où :

$$\boxed{A=\left(\frac{9}{2}e^2+90-36e-9\ln 2\right)cm^2}$$

Exercice 11

$I(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$

Calculons la quantité d'électricité
Transportées a chaque demi période

C'est intégrer $I(t)$ entre 0 et $\frac{T}{2}$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$ $\left(t=\frac{T}{2}\text{ Demi-période}\right)$

$$Q=\int_0^{\frac{T}{2}} I_m\cos(\omega t+\varphi)\,dt, T>0$$

$$Q=\frac{I_m}{\omega}\left[\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$Q=\frac{I_m}{\omega}\left[\sin\left(\omega\frac{T}{2}+e\right)-\sin(\varphi)\right]$$

$$Q=\frac{I_m}{\omega}\left[\sin(\pi+e)-\sin(\varphi)\right]$$

$$Q=\frac{I_m}{\omega}(-2\sin\varphi)$$

Exercice 12 ?

$$W=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U(t)I(t).dt$$

$$W=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_m I_m\cos^2(\omega t).dt$$

$$W=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} U_m I_m.\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}.dt$$

$$W=\frac{U_m I_m}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1+\cos(2\omega t)).dt$$

$$W=\frac{U_m I_m}{2}\left[t+\frac{\sin(2\omega t)}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$W=\frac{1}{2}U_m I_m\left[\frac{2\pi}{\omega}+\frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(2\omega\frac{2\pi}{\omega}\right)}_{\sin 4\pi=0}-0\right]$$

$$\boxed{W=\frac{\pi U_m I_m}{\omega}}$$

Exercice 13

$f(x)=\sin^2 x, x\in[0,\pi]$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,\pi]$

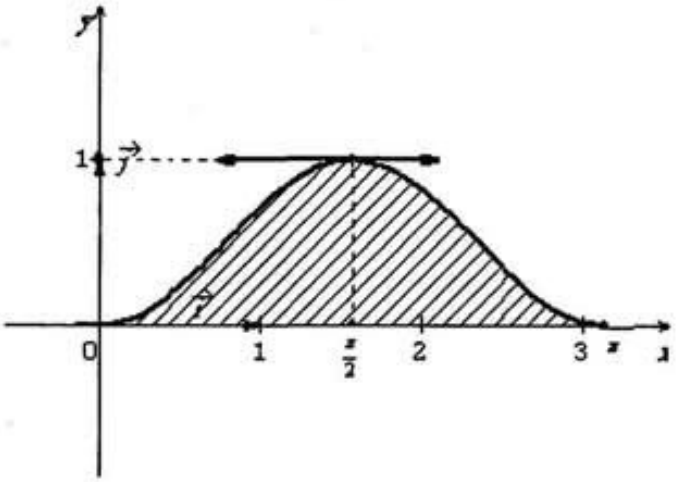
et $f'(x)=2\cos x.\sin x$, $\boxed{(u^n)'=nu'u^{n-1}}$

Comme $\sin x\geq 0\ \ \forall x\in[0,\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos x$.

T.V :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0



2) (linéarisation : voir cour *nombres complexes*)

$$\sin^2 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2ix}-1+e^{-2ix}}{-4}=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4$$

$$=\frac{e^{4ix}-4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}.e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$

$$=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{16}+\frac{6}{16}-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{4}$$

$$=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{3}{8}-\frac{\cos x}{2}$$

$$\boxed{(\sin x)^4=\frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos x}{2}+\frac{3}{8}}$$

3) $A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\left(\int_0^{\pi}\sin^2 x dx\right)\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$

$$A=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx.va$$

$$A=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$A=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0-0)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \boxed{A=\frac{\pi}{2}.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$$

4) $V=\pi\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$ (unité de volume)

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx\ u.volume$$

$$V=\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 4x}{32}\right]_0^{\pi}$$

$$V=\pi\left[\frac{3}{8}\pi-0\right]=\frac{3}{8}\pi^2\Rightarrow \boxed{V=\frac{3}{8}\pi^2.(uv)}$$

Exercice 14

$f(x)=1+2\cos^2 x;\ x\in[0,\pi]$

1) f est. derivable sur $[0,\pi]$ et

$$f'(x)=0+2\times 2\times\cos x(-\sin x)$$
$$=-4\cos x.\sin x$$

Or $\forall x\in[0,\pi]:\sin x\geq 0$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(-\cos x)$

T.V :

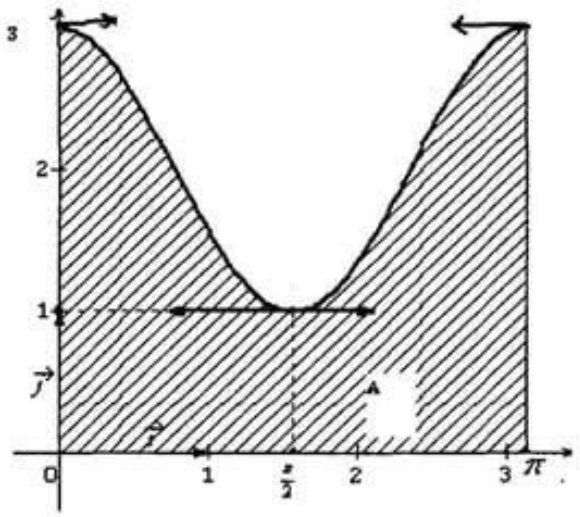
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$		+	0	−	
$f(x)$	3	↘	1	↗	3

$f(0)=1+2\cos^2 0=1+2=3$

$f(\pi)=1+2\cos^2\pi=1+2(-1)^2=3$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+2\cos^2\frac{\pi}{2}=1+0=1$

2)



3) a) $A=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi}(1+2\cos^2 x)\,dx(va)$

$$=\int_0^{\pi}dx+\int_0^{\pi}2\cos^2 x\,dx,\ \boxed{\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

$$=\pi+\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\pi+[x+\sin 2x]_0^{\pi}=\pi+\pi-0$$

$$=\pi+\pi=2\pi.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$

Donc : $\boxed{A=2\pi.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$

b) $V=\pi\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx.uv$

$$V=\pi\int_0^{\pi}(1+2\cos^2 x)\,dx.uv$$

$$V=\pi\int_0^{\pi}(1+4\cos^2+4\cos^4 x)dx$$

$$V=\pi\left[\int_0^{\pi}dx+4\int_0^{\pi}\cos^2 x dx+4\int_0^{\pi}\cos^4 x dx\right]$$

Or on a :

$$\int_0^{\pi}dx=\pi$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2\pi}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

On va linéaires : $\cos^4 x$.

$$\cos x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$\cos x=\frac{e^{i4x}+4e^{3ix}e^{ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$

$$\cos x=\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{16}+4\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{16}\right)+\frac{6}{16}$$

$$\cos^4 x=\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}$$

D'où :

$$\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 4x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{8}\right)dx$$

$$=\left[\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi-0=\frac{3}{8}\pi$$

Par la suite :

$$V=\pi\left[\pi+4\times\frac{\pi}{2}+4\times\frac{3\pi}{8}\right]u.v$$

$$=\pi\left[\pi+2\pi+\frac{3\pi}{2}\right]u.v$$

$$=\pi\times\frac{9\pi}{2}=\frac{9}{2}\pi^2 u.v$$

Conclusion : $\boxed{V=\frac{9}{2}.\pi^2.u.v}$

Exercice 15

A/ $K(x)=\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1, x\in\mathbb{R}$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}K(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)e^{-x}-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x+1\right)e^{-x}+1;\quad t=-x$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(t^2-t+1\right)e^{t}+1$$

$$=\lim_{t\to-\infty}t^2e^{t}-te^{t}+e^{t}-1=-1$$

b) K est une fonction dérivable

sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions dérivable :

$x\mapsto x^2+x+1$ Polynôme

$x\mapsto e^{-x}$: (Dérivable sur $\mathbb{R}$)

et $K'(x)=(2x+1)e^{-x}+\left(x^2+x+1\right)(-e^{-x})$

$K'(x)=e^{-x}\left(2x+1-x^2-x-1\right)$

$K'(x)=\left(x-x^2\right)e^{-x}, x\in\mathbb{R}$

Comme $e^{-x}>0$: le signe de $K'(x)$ est

Celui de $x-x^2$:

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0			$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$			↘	1

$K(0)=1-1=0$ et $K(1)=3e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1$

2) on a : $\frac{3}{e}-1\approx 1,10>0$

*/ $K\left(]-\infty,0]\right)=[0,+\infty[$

$K\left(]0,1]\right)=\left]0,\frac{3}{e}-1\right]$

K Est une bijection sur chacun des intervalles $]-\infty,0]$ et $]0,1]$

Comme $K(0)=0$ alors dans $]-\infty,1]$ l'unique solution de $K(x)=0$ est 0 .

*/ K est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $K([1,+\infty[)=\left]-1,\frac{3}{e}-1\right]$

Alors l'équation $K(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[1,+\infty[$

On a : $K(2)=9e^{-2}-1\approx -0,03<0$ donc : $\alpha\in]1,2[$

En utilisant une calculatrice on trouve :

$\begin{cases} K(1,79) \square 0,00077 \\ K(1,8) \square -0,001 \end{cases}$

Remarque : comme $1 < \alpha < 2$

On utilisant une dichotomie :

On a : $K(1,5) > 0$

Pour $\frac{2+1,5}{2} = 1,75$

On a : $K(1,75) > 0$ .....

Conclusion :

$\boxed{1,79 < \alpha < 1,80}$

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe *de* $K(x)$		$+$	0	$-$	

B/ $f(x) = (2x+1)e^{-x}; g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

1) */ $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$

Les points de coordonnées $(0, f(0)) \in C_f$

Et $(0, g(0)) \in C_g$.

Donc : $\boxed{A(0,1) \in C_f \cap C_g}$

*/ $f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$

$\Rightarrow f'(0) = 2 - 1 = 1$

$g'(x) = \frac{2(x^2x+1) - (2x+1)^2}{(x^2x+1)^{20}}$

$\Rightarrow g'(0) = 1$

Donc C_f et C_g ont la même tangente

La tangente T en A tangente à pour équation :

T : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = g'(0)(x-0) + g(0) = x$

Donc T a pour équation $y = x$

2) a) on a

$$f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)\left[(x^2+x+1)e^{-x} - 1\right]}{x^2+x+1}$$

Donc : $\boxed{f(x) - g(x) = \frac{(2x+1).K(x)}{x^2+x+1}}$

b) $x^2 + x + 1 > 0; \forall x \in \square$

Puisque $\Delta = -3 < 0$

Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $(2x+1).K(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
Signe *de* $K(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x) - g(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	

c) Position relative :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$g(x) - f(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	
Position	C_g / C_f		C_f / C_g		C_g / C_f		
			$(-0.5, 0)$		$(\alpha, f(\alpha))$		

3) a) la fonction h est dérivable et :

$$h'(x)=-2e^{-x}+(-2x-3)(-e^{-x})-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$=e^{-x}(-2+2x+3)-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$=(2x+1)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$=f(x)-g(x)$$

Donc $h'(x)=f(x)-g(x)$

On aura h est une primitive de $f-g$.

b) $A=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-g(x)|dx.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$

Comme : $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subset\left[-\frac{1}{2},\alpha\right]$

Alors $f(x)-g(x)\geq 0$

Par suite :

$$A=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g(x))dx\right)\times 4cm^2$$

$$A=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}h'(x)dx\right)v.a$$

$$=\left[h(x)\right]_0^{\frac{1}{2}}.4cm^2$$

$$=\left(h\left(\frac{1}{2}\right)-h(0)\right)\times 4cm^2$$

$$=\left[\left(-4e^{-\frac{1}{2}}-\ln\frac{7}{4}\right)-(-3-0)\right]\times 4cm^2$$

$$=\left[-\frac{4}{\sqrt{e}}-\ln\frac{7}{4}+3\right]\times 4cm^2$$

D'où $\boxed{A=\left(12-\frac{16}{\sqrt{e}}-4\ln\frac{7}{4}\right)cm^2}$

Exercice 16

I/ $g(x)=(1-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}_+$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}-xe^{-x}$

$$=\lim_{X\to-\infty}e^{X}+Xe^{X},(X=-x)$$
$$=0+0=0$$

2) a) $g'(x)=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})$

$$g'(x)=e^{-x}(-1-1+x)$$
$$g'(x)=(x-2)e^{-x}$$

T.V:

X	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	$-e^{-2}$	↗	0

On a: $g([0,2])=\left[-\frac{1}{e^2},1\right]$

Donc pour $0\leq x\leq 2$ on a: $g(x)\leq 1$

On a $g([2,+\infty[)=\left[-\frac{1}{e^2},0\right[$

Donc pour $x\geq 2$: $g(x)\leq 0\leq 1$

Conclusion : $\forall x\in[0,+\infty[:g(x)\leq 1$

II/ $f(x):\begin{cases}x\ln(-x),x<0\\x(2-e^{-x}),x\geq 0\end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to0^-}x\ln(-x),(X=-x)$

$$=\lim_{X\to0^+}-X\ln X$$
$$=0=f(0)$$

Donc f est continue à gauche en 0.

Conclusion :

f est continue à en 0

2) a) */ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(2-e^{-x})}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}2-e^{-x}=1$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$.

*/ $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x\ln(-x)}{x}$

$$=\lim_{x\to0^-}\ln(-x),(X=-x)$$
$$=\lim_{X\to0^+}\ln X=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 0

b) */ (C) admet une demi tangente verticale dirigé vers le haut à gauche au point d'abscisse 0.
*/ (C) admet une demi tangente d'équation $y = x$ à droite au point d'abscisse 0.

3) a) pour $x > 0$: f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x\left(2-e^{-x}\right)\right)' \\ &= \left(2-e^{-x}\right)+x\left(e^{-x}\right) \\ &= 2-e^{-x}(1-x) \\ &= 2-g(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x > 0$: $f'(x) = 2-g(x)$

c) pour $x < 0$: f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x\ln(-x)\right]' \\ &= \ln(-x)+x\times\left(\frac{-1}{-x}\right) \\ &= \ln(-x)+1 \end{aligned}$$

Pour $x < 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(-x)+1 = 0 \Leftrightarrow \ln(-x) = -1$

$\Leftrightarrow -x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

On a aussi :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \ln(-x) \geq -1 \\ &\Leftrightarrow -x \geq e^{-1} \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

Pour $x > 0$

$f'(x) = 2-g(x)$

D'après (**I/2**) b) $g(x) \leq 1$ d'où $f'(x) \geq 0, \forall x > 0$

T.V :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{e}$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x\ln(-x), X = -x \\ &= \lim_{X\to+\infty} -X\ln X = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2-e^{-x}\right) = +\infty$$

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}(-1) = \frac{1}{e}$$

4) a)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x)-2x &= \lim_{x\to+\infty} x\left(2-e^{-x}\right)-2x \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2x-xe^{-x}-2x \\ &= \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty}} = 0 \end{aligned}$$

Donc dans la droite Δ d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\ln(-x)}{x}$

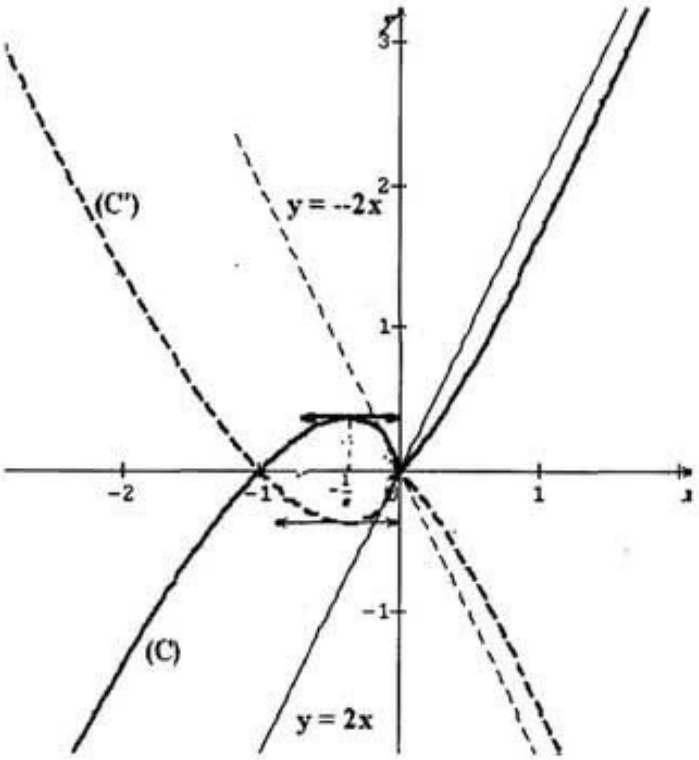
$= \lim_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty$

Donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction $(o,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

5) a) $f(-1) = (-1)\ln(1) = -1\times 0 = 0$

Donc (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1.

Courbe :



b) $S_{(o,\vec{i})}(C)=(C')$

III/ $\alpha \in]-1,0[$

1) $\int_{-1}^{\alpha} f(t)dt = \int_{-1}^{\alpha} t\ln(-t)\,dt$

Effectuant une intégration par parties :

$U(t)=\ln(-t) \to U'(t)=\frac{1}{t}$

$V'(t)=t \to V(t)=\frac{t^2}{2}$

Donc : $\int_{-1}^{\alpha} f(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(-t)\right]_{-1}^{\alpha} - \int_{-1}^{\alpha}\frac{1}{t}.\frac{t^2}{2}dt$

$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha) - 0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha} t\,dt$

$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{\alpha}$

$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha) - \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{2}\right]$

$$\boxed{\int_{-1}^{\alpha} f(t)dt = \frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha) - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

2) on a :

$A(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha}\left|f(t) - (-f(t))\right|dt\ u.a$

$= 2\int_{-1}^{\alpha} f(t)\,dt\ u.a$

$= 2\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln(-\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 4cm^2$

$$\boxed{A(\alpha) = \left(4\alpha^2\ln(-\alpha) - 4\alpha^2 + 2\right)cm^2}$$

3) a) $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0^-} 4\alpha^2\ln(-\alpha) - 4\alpha^2 + 2$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} 4t^2\ln t + 4t + 2 = 2$

b) $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} A(\alpha)$: représente l'aire de la région du plan limite par les droites d'équation $x=0$ et $x=-1$ et les courbes (C) et (C').

Exercice 17

I/ $g(x) = x^2 + 1 - \ln x;\ x > 0$

1) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

T.V :

X	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}(3+\ln 2)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + 1 - \overbrace{\ln x}^{-\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 1 - \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{1}{2}+1+\ln\sqrt{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(3+\ln 2)$$

2) La fonction admet un minimum absolu en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ atteint $\frac{1}{2}(3+\ln 2)>0$ d'où $\forall x\in]0,+\infty[$ on a : $g(x)>0$.

II/ $f(x)=x+2+\dfrac{\ln x}{x}, x>0$

1) a) $x\mapsto x+2$: est une fonction polynôme

Donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$.

$x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$: est dérivable sur $]0,+\infty[$: quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et par suite f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=(x+2)'+\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=1+\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}$$

$$=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et $g(x)>0$

Donc $\forall x>0$ on a $f'(x)>0$

T.V :

x	0		$+\infty$
$f(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

*/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+2+\dfrac{\ln x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x+2)+\underbrace{\ln x}_{-\infty}.\overbrace{\frac{1}{x}}^{+\infty}=-\infty$$

*/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2+\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$

2) a) on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\overbrace{\frac{x+2}{x}}^{1}+\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{\ln x}{x}=2$$

Donc la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote oblique a C au voisinage de $+\infty$.

b) Etudions le signe de : $f(x)-(x+2)$:

On a : $f(x)-(x+2)=\dfrac{\ln x}{x}, x>0$

D'où on a :

X	0	1	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	‖ −	0	+
Position	‖ Δ/C	$(H,3)$	C/Δ

3) $x\in[1,+\infty[$

a) $M(x,f(x))$ et $N(x,x+2)$

On a : $MN=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$

$$=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-(x+2))^2}$$

$$=\sqrt{\left[\frac{\ln x}{x}+(x+2)-(x+2)\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2}=\left|\frac{\ln x}{x}\right|=\frac{\ln x}{x}$$

Car $x\geq 1$ donc $\ln x>0$ et $x>0$

D'où : $\boxed{MN=\dfrac{\ln x}{x}}$

b) on a : $MN=\dfrac{\ln x}{x}$ donc

MN est maximale si et seulement si : $\frac{\ln x}{x}$ est maximale . Posons $h(x)=\frac{\ln x}{x}$

On a : $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow 1=\ln x\Leftrightarrow x=e$

T.V :

x	1	e	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	0 ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

h admet $\frac{1}{e}$ pour maximum absolue

Donc MN est maximale pour $\boxed{x_0=e}$

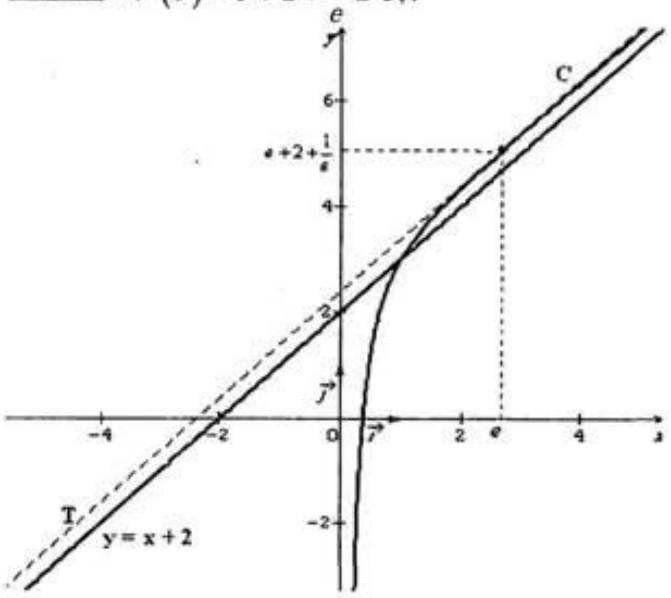
c) Soit T la tangente à C au point d'abscisse $x_0=e$

On a : $f'(e)=\frac{g(e)}{e^2}=\frac{e^2}{e^2}=1$

et $f'(e)$: coefficient directeur de T

Donc T et Δ sont parallèles car elles ont même coefficient directeur

Courbe : $f(e)=e+2+\frac{1}{e}\square 5,1$



5) a) $A=\int_1^e\left|f(x)-(x+2)\right|dx.u.a$

$=\left(\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx\right)u.a=\left(\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx\right)u.a$

$=\int_1^e(\ln x)'.\ln x dx.u.a=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e$

$=\frac{(\ln e)^2}{2}-0$

Donc : $\boxed{A=\frac{1}{2}.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|}$

b) Soit B l'aire de la région du plan Limité par $y=x+2$, C_f , $x=\alpha$ et $x=e$

On a :

$B=\int_e^\alpha\left|f(x)-(x+2)\right|dx=\int_e^\alpha\frac{\ln x}{x}dx$

$=\int_e^\alpha\frac{1}{x}.\ln x dx=\int_e^\alpha(\ln x)'.\ln x.dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^\alpha=\left(\frac{(\ln\alpha)^2}{2}-\frac{1}{2}\right).\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$

On a :

$A=B\Leftrightarrow\frac{(\ln\alpha)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{(\ln\alpha)^2}{2}=1$

$\Leftrightarrow(\ln\alpha)^2=2\Leftrightarrow\ln\alpha=\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha=e^{\sqrt{2}}$

Par suite l'aire de la région limité par C et les droites d'équations :

$y=x+2, x=e, x=\alpha$ est égale à A pour $\boxed{\alpha=e^{\sqrt{2}}}$